第27卷 第3期
2010年06月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 3
June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0496-07

拱结构平面外稳定系数的实用计算方法*

谭红霞[1,2], 陈政清[1], 封周权[1]

(1- 湖南大学风工程试验研究中心，长沙 410082; 2- 湘潭大学土木工程与力学学院，湘潭 411105)

摘 要: 用有限元通用程序进行稳定分析给出的是一个综合性的计算结果，探讨近似计算方法是很有必要的。本文用能量法推导了在竖向均布荷载作用下，分别考虑保向力、非保向力、横向静风荷载时抛物线拱肋的稳定系数的理论计算公式，并应用于某工程实例，计算结果与ANSYS计算结果的相对误差分别为3.4%、2.1%、3.8%。此公式既简便又符合实际情况，可作为设计人员对软件计算结果的验证。

关键词: 拱桥；竖向均布荷载；能量法；稳定系数

分类号: AMS(2000) 34D35　　**中图分类号**: U443.3　　**文献标识码**: A

1 引言

在以前的研究中，大多只是对圆弧拱受径向荷载的情形进行分析，目的就是为了获得解析解，而对抛物线和悬链线则要进行试算。圆弧拱在小矢跨比情形下与抛物线拱有较好的近似性，所以有学者比较了圆弧拱、抛物线及悬链线拱的稳定有效长度[1,2]。而实际情况是大多数拱受的荷载为竖向荷载，与圆弧拱所受的径向荷载有较大差异。本文利用能量法，研究在竖向均布荷载作用下，把屈曲变形作为一个平衡状态来分析并以此来确定临界荷载[3-5]，推导抛物线拱平面外横向稳定系数的实用计算方法。在研究中分别考虑保向力和非保向力的作用，并推导了横向风荷载作用下拱的稳定计算公式。

2 拱肋的面外稳定计算

2.1 抛物线拱肋在保向力作用下的平面外稳定计算

所谓“保向力”，就是假定作用在拱轴线上的竖向荷载在拱轴侧倾过程中始终保持竖直方向不变，它是为研究方便而对荷载模式所作的简化[6]。

在保向力荷载作用下平面外稳定研究过程中，我们作如下假定：

1) 拱肋截面特性沿跨径方向不变，即等截面；

2) 拱肋的轴向应变为零；

3) 作用在拱轴线上的荷载 q 始终竖直向下并沿跨度均匀分布。如图1所示。

设拱轴线的方程为

$$y = mz^2, \tag{1}$$

收稿日期: 2008-09-05. **作者简介**: 谭红霞(1969年6月生)，女，博士. 研究方向：桥梁结构理论.

***基金项目**: 国家自然科学基金(50478051; 50708035).

f 为矢高，L 为半跨长。若记 $z=\varphi L$，$n=4\frac{f}{2L}=2mL$，则有

$$f=mL^2,\quad \mathrm{d}z=L\mathrm{d}\varphi, \tag{2}$$

$$y=\frac{1}{2}nL\varphi^2. \tag{3}$$

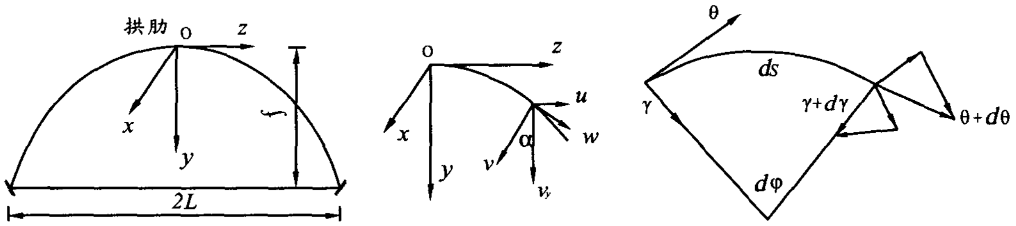


图 1: 拱结构坐标图

考虑横向挠曲及扭转，将上面的抛物线拱轴方程代入绕 y 轴、z 轴的挠曲率得

$$\begin{aligned}\chi_y&=\frac{1}{\rho_y}=\frac{\mathrm{d}\Upsilon+\theta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\Upsilon}{\mathrm{d}s}+\frac{\theta}{R}\\&=\frac{n^2\varphi}{L^2}(1+n^2\varphi^2)^{-2}u'_\varphi-\frac{1}{L^2}(1+n^2\varphi^2)^{-1}u''_\varphi+\frac{n}{L}(1+n^2\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}\theta,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\chi_z=\frac{1}{\rho_z}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{\Upsilon}{R}=\frac{n}{L^2}(1+n^2\varphi^2)^{-2}u'_\varphi+\frac{1}{L}(1+n^2\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}\theta'_\varphi, \tag{5}$$

式中 u'_φ 和 θ'_φ 表示对 φ 的导数。

对于承受对称荷载的拱肋结构，沿跨度水平方向的位移为零，又由拱肋的不可伸缩假定，拱的轴向应变也为零，可得

$$v'_{y\varphi}=-\frac{1}{2mL\varphi}(u'_\varphi)^2. \tag{6}$$

由拱肋横向挠曲所产生的应变能为

$$U_y=\frac{1}{2}\int_s EI_y\chi_y^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}EI_y\chi_y^2L\sqrt{1+n^2\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{7}$$

由拱肋扭转所产生的应变能为

$$U_z=\frac{1}{2}\int_s GJ\chi_z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}GJ\chi_z^2L\sqrt{1+n^2\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{8}$$

荷载所做的功为

$$V=\int_{-L}^{L}v_yq\mathrm{d}z=q\int_{-1}^{1}v_yL\mathrm{d}\varphi. \tag{9}$$

考虑到满足边界条件，取多项式位移函数

$$u=\sum a_i\varphi^i,\quad \theta=\sum b_i\varphi^i,\quad i=0,1,2,3,4. \tag{10}$$

对于拱脚采用固结支承，边界条件为$\varphi=\pm1$时，$u=u_\varphi'=0$, $\theta=\theta_\varphi'=0$，得

$$\begin{cases} u=a_0g, \quad u_\varphi'=a_0g_\varphi', \quad u_\varphi''=a_0g_\varphi'', \\ \theta=b_0g, \quad \theta_\varphi'=b_0g_\varphi', \quad \theta_\varphi''=b_0g_\varphi'', \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$g=1-2\varphi^2+\varphi^4, \quad g_\varphi'=-4\varphi+4\varphi^3, \quad g_\varphi''=-4+12\varphi^2, \tag{12}$$

由式(6)可知，当$\varphi=\pm1$时，可以得到

$$v_y=\frac{4a_0^2}{3nL}(1-3\varphi^2+3\varphi^4-\varphi^6). \tag{13}$$

通过将式(11)和(12)先代入式(4)和(5)，再代入式(7)和(8)，及将式(13)代入式(9)，可得总势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= U_y+U_z-V \\ &= \frac{1}{2}EI_y\Big[\frac{a_0^2}{L^3}(A_1+kB_1)+\frac{a_0b_0}{L^2}(A_2+kB_2)+\frac{b_0^2}{L}(A_3+kB_3)\Big]-a_0^2\frac{q}{n}C_1, \end{aligned} \tag{14}$$

其中$A_1\sim A_3$，$B_1\sim B_3$为n, φ, g的函数，$k=\frac{GJ}{EI_y}$为拱肋的抗扭刚度与横向抗弯刚度比；当拱脚为固结支承时，积分常数$C_1=\frac{128}{105}$。

由$\delta\Pi=0$，可以得到关于a_0和b_0的齐次方程组，则满足齐次方程组有非零解条件的荷载即为拱肋横向稳定临界荷载q_{cr}。若记

$$q_{cr}=\lambda_{cr}\frac{EI_y}{(2L)^3}, \tag{15}$$

式中λ_{cr}称为横向稳定系数。由此，我们可以得到

$$\lambda_{cr}=\frac{4n}{C_1}\Big[A_1+kB_1-\frac{(A_2+kB_2)^2}{4(A_3+kB_3)}\Big], \tag{16}$$

代入不同的矢跨比和刚度比，由上式即可求得相应的横向稳定系数。

2.2 抛物线拱肋在非保向力作用下的面外稳定计算

当拱肋侧倾时，吊杆有一个阻止侧倾的水平恢复力H。这个恢复力就是吊杆拉力T的水平分力，它有使拱回到原来的平面内位置的趋势，这一效应称为荷载的“非保向力效应”。由于吊杆下端受侧向刚度较大的桥面约束产生较显著的非保向力效应，从而使拱的横向稳定性大大提高[7]，如图2所示。

拱肋在非保向力荷载作用下，平面外稳定研究过程中在2.1的基本假定基础上再假定：桥面系具有横向抗弯刚度E_DI_D，忽略其竖向抗弯刚度。根据基本假定，吊杆的拉力为：$T=qd$，其中q为桥面竖向均布荷载，d为吊杆间距。水平恢复力为

$$H=T\frac{u-u_D}{f-y}, \tag{17}$$

其中u, u_D分别为拱肋和桥面在x轴方向的线位移。

水平恢复力所做的功为

$$V_H=-\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}H(u-u_D)\mathrm{d}z=-\int_{-1}^{1}\frac{q}{n(1-\varphi^2)}(u-u_D)^2\,\mathrm{d}\varphi. \tag{18}$$

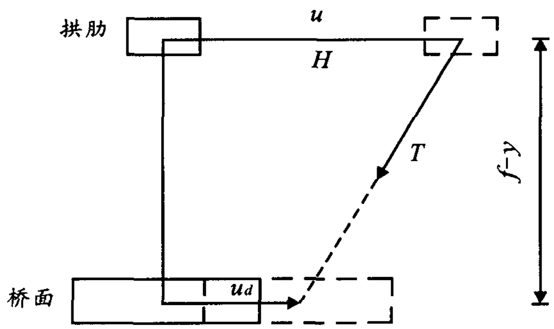


图 2: 非保向力效应

桥面系横向弯曲应变能为

$$U_D = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} E_D I_D (u_D'')^2\,\mathrm{d}z, \tag{19}$$

式中 $u_D = c_0 g$ 为桥面系的横向位移函数，u_D'' 是对 z 求二阶导数。

由式 (18) 和式 (19)，可得总势能为

$$\begin{aligned}\Pi' = {} & \frac{1}{2}EI_y\Big[\frac{a_0^2}{L^3}(A_1 + kB_1) + \frac{a_0 b_0}{L^2}(A_2 + kB_2) + \frac{b_0^2}{L}(A_3 + kB_3) + \frac{2c_0^2}{L^3}k_D E_1\Big] \\ & -\frac{q}{n}\big[a_0^2 C_1 - (a_0 - c_0)^2 D_1\big],\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $k_D = \frac{E_D I_D}{EI_y}$ 为桥面系横向抗弯刚度与拱肋横向抗弯刚度之比；当拱脚为固结支承时，积分常数 $D_1 = \frac{32}{35}$，$E_1 = \frac{64}{5}$。

根据 $\delta\Pi' = 0$，可以得到临界荷载

$$q_{cr} = \lambda_{cr}' \frac{EI_y}{(2L)^3}, \tag{21}$$

式中 λ_{cr}' 为非保向力作用下拱的横向稳定系数

$$\lambda_{cr}' = \frac{4n}{A}\big(B - \sqrt{B^2 - 4AC}\,\big),$$

A, B, C 为 $A_1 \sim A_3$，$B_1 \sim B_3$，D_1 的函数。

2.3　横向静风荷载作用下拱的面外稳定计算

在考虑竖向荷载的基础上，再考虑横向风荷载的作用，研究拱肋的平面外稳定问题，研究过程中考虑非保向力效应。

假定作用在桥面系上的横向静风荷载沿桥跨径方向均匀分布，其荷载集度为 q_{f1}；作用在拱肋上的横向风荷载沿高度方向均匀分布，荷载集度值 q_{f2} 按拱肋 0.65 倍高度处的风速值确定[8,9]；风荷载垂直作用于拱肋与桥轴线所确定的平面。

桥面系横向静风荷载所做的功

$$V_{F1} = \int_{-L}^{L} u_D q_{f1}\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} u_D q_{f1} L\,\mathrm{d}\varphi = c_0 q_{f1} F_1, \tag{22}$$

式中

$$F_1 = L\int_{-1}^{1}(1-2\varphi^2+\varphi^4)\mathrm{d}\varphi.$$

拱肋横向风荷载所做的功

$$V_{F2} = a_0 q_{f2} L\int_{-1}^{1}(1-2\varphi^2+\varphi^4)\sqrt{1+n^2\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = a_0 q_{f2} F_2, \tag{23}$$

式中

$$F_2 = L\int_{-1}^{1}(1-2\varphi^2+\varphi^4)\sqrt{1+n^2\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

拱的总势能为

$$\begin{aligned}\Pi_F &= \Pi' - V_{F1} - V_{F2}\\ &= \frac{1}{2}EI_y\Big[\frac{a_0^2}{L^3}(A_1+kB_1)+\frac{a_0 b_0}{L^2}(A_2+kB_2)+\frac{b_0^2}{L}(A_3+kB_3)+\frac{2c_0^2}{L^3}k_D E_1\Big]\\ &\quad -\frac{q}{n}\big[a_0^2 C_1-(a_0-c_0)^2 D_1\big]-c_0 q_{f1}F_1-a_0 q_{f2}F_2.\end{aligned} \tag{24}$$

由 $\delta\Pi_F = 0$，可以得到关于 a_0, b_0, c_0 的非齐次方程组。再由克莱姆法则可以求得

$$a_0 = \frac{D_a}{D_0},\quad b_0 = \frac{D_b}{D_0},\quad c_0 = \frac{D_c}{D_0}, \tag{25}$$

式中 D_0, D_a, D_b, D_c 为 $A_1\sim A_3$，$B_1\sim B_3$，C_1，D_1 的函数。

得到拱肋横向位移与荷载的关系曲线

$$u = a_0 g = a_0(1-2\varphi^2+\varphi^4) = \frac{D_a}{D_0}(1-2\varphi^2+\varphi^4). \tag{26}$$

由于拱肋横向位移的最大值发生在跨中 $\varphi = 0$ 处，故可只考虑拱肋跨中截面横向位移与荷载的关系，则跨中横向位移 u_0 可以表示为

$$u_0 = \frac{D_a}{D_0}. \tag{27}$$

3 算例

某钢箱拱桥矢跨比 $f/L_0 = 1/4.92$。拱肋为钢箱结构，其横向抗弯刚度 $EI_y = 3.853227\times 10^{10}\,\mathrm{N\cdot m^2}$，抗扭刚度 $GJ = 2.95105\times10^{10}\,\mathrm{N\cdot m^2}$；桥面为混凝土箱梁，横向抗弯刚度 $E_D I_D = 1.515492\times10^{12}\,\mathrm{N\cdot m^2}$。桥面处的设计基准风速为 $27.483\,\mathrm{m/s}$，风荷载集度 $q_{f1} = 1072.445\,\mathrm{N/m}$；拱肋0.65倍高度处的设计基准风速为 $32.314\,\mathrm{m/s}$，风荷载集度 $q_{f2} = 1162.498\,\mathrm{N/m}$。则拱肋抗扭刚度与横向抗弯刚度比 $k = 0.543727$，桥面系横向抗弯刚度与拱肋横向抗弯刚度比 $k_D = 39.330462$。

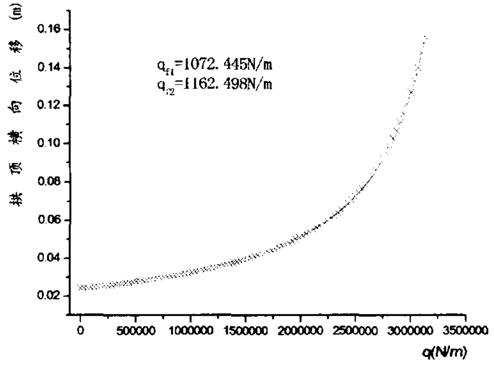
应用以上所推导的公式，可以分别计算出抛物线拱肋在保向力作用下、非保向力作用下和横向风荷载作用下的横向稳定系数，如表1所示。

表 1: 拱肋在各种荷载作用下的稳定性比较

	保向力作用下的 λ_{cr}	非保向力作用下的 λ_{cr}	横向风荷载作用下的拱顶横向位移 (m)
本文方法	39.24	126.65	0.132
ANSYS	37.91	123.99	0.127
相对误差	3.4%	2.1%	3.8%

横向风荷载作用下拱顶横向位移与竖向均布荷载 q 的关系曲线如图 3 左图所示。根据上面的计算结果，当不考虑横向风力的作用时，其临界荷载为 $q_{cr} = 3.29 \times 10^6$ (N/m)；当考虑横向风力的作用时，其临界荷载为 $q_{cr} = 3.13 \times 10^6$ (N/m)，相对不考虑横向风力的作用时略有降低。

考虑不同的横向风力 q_f (500 ~ 1500 N/m)，根据公式 (27) 计算得到的拱顶横向位移与竖向均布荷载 q 的关系曲线如图 3 右图所示。由图可以看出，随着横向风力的 q_f 的增加，拱肋横向失稳的临界荷载减小。



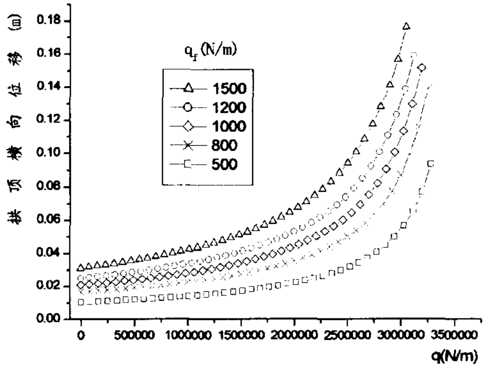


图 3: 左图: 实桥风荷载作用下的荷载-位移曲线 右图: 不同风荷载作用下的荷载-位移曲线

4 结论

根据能量原理推导出了抛物线拱在竖向均布荷载作用下，不考虑非保向力和考虑非保向力效应时及在横向风荷载作用下的面外稳定的理论计算公式，并将其应用于一座实桥的稳定性计算，其结果与 ANSYS 计算结果很接近，这种近似计算方法快速简便，可作为工程人员和设计人员对设计软件、设计成果的验证之用，以及作为工程加固之前的稳定性判断参考依据。

参考文献：

[1] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京：中国铁道出版社，2002
Li G H. Stability and Vibration of Bridge Structure[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2002

[2] 涂慧，刘超，江成顺. 二维半线性伪抛物方程差分格式及数值模拟[J]. 工程数学学报，2006, 23(1): 187-190
Tu H, Liu C, Jiang C S. The difference scheme and numerical simulations of 2D semi-linear pseudo-parabolic equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(1): 187-190

[3] 刘古岷，张若晞，张田申. 应用结构稳定计算[M]. 北京：科学出版社，2004
Liu G M, Zhang R X, Zhang T S. Stability Calculation of Applicable Architecture[M]. Beijing: Science Press, 2004
[4] 张显军，陶红艳. 应用能量变分法计算下承式系杆拱侧倾临界荷载[J]. 森林工程，2006, 22(3): 27-62
Zhang X J, Tao H Y. Calculation with energy variational method for critical load of side inclination through tied arch bridge[J]. Forest Engineering, 2006, 22(3): 27-62
[5] 吕毅刚，余钱华，张建仁. 能量法分析高墩大跨连续刚构桥稳定性[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版)，2005, 2(4): 22-27
Lv Y G, Yu Q H, Zhang J R. Stability analysis of the continuous rigid frame bridge with large-span and high-pier via energy methods[J]. Journal of Hunan Light Industry College (Natural Sciences Edition), 2005, 2(4): 22-27
[6] 杨永清，蒲黔辉，何广汉. 抛物线单肋拱横向稳定实用计算(一)[J]. 工程力学增刊，1999: 866-871
Yang Y Q, Pu Q H, He G H. Practical calculating method for transverse stability of parabolic-shaped single rib Arch (I)[J]. Engineering Mechanics Supplement, 1999：866-871
[7] 杨永清，蒲黔辉，何广汉. 抛物线单肋拱横向稳定实用计算(二)[J]. 工程力学增刊，1999: 872-879
Yang Y Q, Pu Q H, He G H. Practical calculating method for transverse stability of parabolic-shaped single rib arch (II)[J]. Engineering Mechanics Supplement, 1999：872-879
[8] 中华人民共和国行业标准. 公路桥梁抗风设计规范(JTG/T D60-01-2004)[S]. 北京：人民交通出版社，2004
Professional Standard of The People's Republic of China. Code For Design of Highway Bridges (JTG/T D60-01-2004)[S]. Beijing: China Communications Press, 2004
[9] Kim S E, Choi S H, Ma S S. Performance based design of steel arch bridges using practical inelastic nonlinear analysis[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2003, (59): 91-108

Practical Computation Method for Out-of-plain Stability Coefficients of Arch Structures

TAN Hong-xia[1,2], CHEN Zheng-qing[1], FENG Zhou-quan[1]

(1- Wind Engineering Research Center, Hunan University, Changsha 410082;
2- College of Civil Engineering and Mechanics, Xiangtan University, Xiangtan 411105)

Abstract: The finite element analysis of stability can merely provide a comprehensive result, it is necessary to study approximate computation methods. The theoretical formulas are derived by energy methods for out-of-plain stability coefficients of parabola arch under the vertical average load, through *considering the effects of directional loads, non-directional loads and transverse static wind loads*, respectively. Our results have been applied to an actual project, results show that the relative error is respectively 3.4%, 2.1%, 3.8% when compared to ANSYS. Our formulas are simple and practical, it can be used as a consult with soft for designers.

Keywords: arch bridge; vertical average load; energy methods; stability coefficient

Received: 05 Sep 2008. **Accepted:** 16 Sep 2009.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (50478051; 50708035).